DOI：10.16285/j.rsm.2024.1521　　**CSTR:**32223.14.j.rsm.2024.1521

圆形地连墙分载法受力计算理论研究

金国龙[1,2]，李鸿桥[2]，谢雄耀[1]

（1. 同济大学 土木工程学院，上海 200092；2. 中船第九设计研究院工程有限公司，上海 200090）

摘　要：圆形地连墙的空间受力机制是基坑工程研究热点之一，以往的理论研究大都聚焦其受轴对称荷载作用的解答，对非轴对称荷载的研究很少，而实际圆形基坑工程因土层不均匀、堆载不一致等因素而导致产生偏压的情况是普遍的。为了解析非轴对称荷载作用下圆形地连墙的空间受力机制，利用“分载法原理”将圆形地连墙的空间柱壳结构体系解构为竖向弹性地基梁和环向弹性地基曲梁的组合结构；给出了环向非轴对称的荷载下圆形地连墙按分载法计算内力与位移的详细推导流程。环向的曲梁符合圆形地连墙水平切面的几何特征，因此该方法既能考虑空间“拱效应”，又能简化原结构空间问题的求解，还能够直观地反映结构参数与内力变形的相互关系。通过两个数值案例验证了理论推导正确性，给出了环向和竖向分担系数的分布云图，结果表明圆形地连墙的环向刚度在承担水土荷载中起着绝对主导作用。

关　键　词：圆形基坑；分载法；弹性地基曲梁；竖向地基曲梁

中图分类号：TU470+.1　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1000－7598 (2025) 增刊－0081－11

A theoretical study on force calculation in circular diaphragm walls using load-sharing method

JIN Guo-long[1,2],　LI Hong-qiao[1],　XIE Xiong-yao[1]

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;
2. China Shipbuilding NDRI Engineering Co., Ltd., Shanghai 200090, China)

Abstract: The spatial stress mechanism of circular diaphragm walls persists as a critical research focus in foundation pit engineering. Previous theoretical studies predominantly address axisymmetric loading conditions, with limited investigation of non-axisymmetric loading scenarios. However, eccentric pressure frequently develops in circular foundation pits due to soil heterogeneity and uneven pile loading. To analyze spatial mechanical behavior under non-axisymmetric loading, we deconstruct the column-shell system into vertically oriented elastic foundation beams and circumferentially arranged curved beams using load decomposition principles. We present a rigorous derivation process for calculating internal forces and displacements under circumferential non-axisymmetric loading. The curved beam configuration matches the horizontal geometry of diaphragm walls, enabling simultaneous consideration of spatial arching effects and simplified solution of three-dimensional structural problems while clarifying parameter-deformation relationships. Numerical validation through two case studies confirms theoretical derivations, with cloud distribution plots illustrating circumferential and vertical load-sharing coefficients. Results demonstrate that circumferential stiffness predominantly governs soil-water load resistance in circular diaphragm walls.

Keywords: circular foundation pit; load-sharing method; curved beam with elastic foundation; vertical foundation curved beams

1　引　言

大型圆形深基坑主要应用于超高层塔楼基础、地下变电站、引水构筑物竖井、大型桥梁锚定基础、特种水池以及液化天然气（liquefied natural gas，简称 LNG）地下储罐基础[1-6]。它们通常采用地下连续墙作为主要为围护结构。我国现行各类基坑设计规范对于采用地连墙的圆形基坑设计一般只有原则

收稿日期：2024-12-12　　录用日期：2025-04-08
基金项目：国家自然科学基金重点项目（No.52038008）；中海石油气电集团有限责任公司课题（No.CGP2022YFCB004）。
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (52038008) and the Project of China Sea Petroleum & Gas Power Group Co., Ltd., (CGP2022YFCB004).
第一作者简介：金国龙，男，1984 年生，硕士，教授级高工，注册岩土工程师，主要从事岩土工程、地下工程等领域设计与研究工作。E-mail: jinguolong@ndri.sh.cn
通讯作者：李鸿桥，男，1988 年生，博士，工程师，主要从事地下结构力学计算及结构健康监测等领域的研究工作。E-mail: 530594891@qq.com

性的技术规定。如《基坑工程技术标准》（DG/TJ 08-61－2018）[7]建议圆形地下连续墙圆形基坑内力和变形按弹性地基板法进行计算，按轴对称结构取单元宽度的墙体作为竖向弹性地基梁计算，环向上尚应考虑地下连续墙受非均匀围压工况下的受力分析，坑外土压力宜采用静止土压力或提高的主动土压力。《公路桥涵地基与基础设计规范》（JTG3363－2019）[8]建议将墙体、内环梁或内衬的环向效应，通过简化为轴线对称结构的等效弹性支承来模拟，并给出地下连续墙体的等效分布弹簧系数计算公式。按照上述规范设计施工，实践反馈的圆形深大基坑案例普遍存在设计位移与内力远大于实测值的问题[9-10]。说明现行规范仍未能充分发挥圆形地连墙结构性能，使设计偏于保守、经济性不强。

针对目前规范上的不足，林克昌等[11]基于目前规范中广泛采用的竖向弹性地基梁模型，将地下连续墙在开挖面以上等效为环向支撑弹簧，开挖面以下等效为增大后的土体抗力系数，采用增量法改进了现有设计计算方法。潘泓等[12]基于松散介质轴对称问题极限平衡理论，将圆形地连墙简化为轴对称竖向弹性地基梁结构，采用全量法进行解析分析，可以适用于无内撑和衬墙的情况。杨骁[13]、欧阳煜[14]等将环梁和支护结构分别视为弹性圆环和弹性圆柱薄壳，基于环梁和圆柱壳的变形协调，得到了在轴对称荷载作用下，具有任意数目弹性环梁支撑圆形深基坑支护结构变形的解析解。崔剑峰等[15]基于轴对称荷载作用下柱壳的三维弹性理论，建立了圆形地下连续墙墙体总势能泛函，利用瑞利里兹法求解控制方程，得到墙体的位移和内力的解析解。

综上所述，目前的理论研究大多是针对圆形地下连续墙在轴对称均匀围压作用下力学响应，对于非均匀荷载造成的偏压很少涉及。而实际工程由于地层的不均匀性、开挖的不对称性及坑边超载等因素，非均匀围压是无法避免的，并且对于结构安全不利，因此需补充完善相关解析分析。本文利用分载法原理将圆形基坑三维柱壳问题转化为环向弹性地基曲梁与竖向弹性地基直梁组合问题，并且给出了在环向非轴对称的荷载下围护结构内力变形的详细理论推导。该理论能直观地反映结构参数与内力变形的相互关系，为圆形基坑围护结构设计提供有益的指导，能够丰富圆形深基坑的计算理论。

2 圆形地连墙力学模型的理论假设

为了简化理论推导，对地下连续墙圆形基坑的围护体系做如下基本假定：

（1）将地下连续墙视作连续均匀的圆柱壳体，再根据分载法的原理，将壳体沿水平环向和竖直方向划分为垂直交叉的两个独立的子结构，即竖向弹性地基直梁和环向弹性地基曲梁，如图 1 所示。

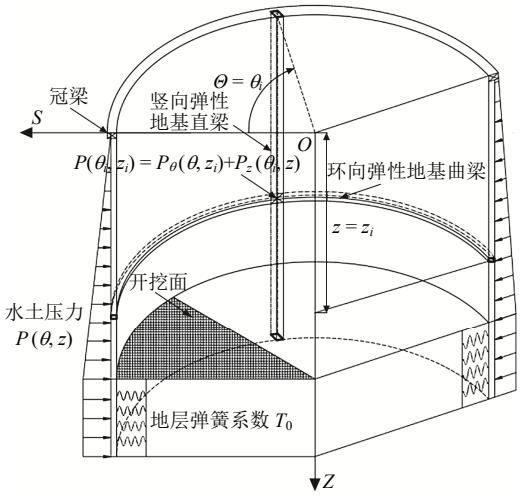


图 1 圆形地连墙分载法原理示意图

Fig.1 Schematic diagram of circular diaphragm wall by load-sharing method

（2）不考虑竖向力的作用，只考虑径向力作用。地连墙的竖向变形通常很小，计算分析中关注的重点是壳体径向变形和墙体的面内弯曲（竖向弹性地基梁的挠度），因此在圆柱坐标下，只考虑地连墙的径向位移，不考虑其竖向位移。

（3）圆形地连墙的径向荷载考虑为非轴对称荷载。由于地层的不均匀性，现实中地连墙所受的水土压力往往是非轴对称的。将非轴对称的水土压力分解为一个轴对称荷载与非轴对称的偏载之和。

（4）为降低理论推导难度，假定圆形地连墙计算范围内的地层是各向同性的单一土层。

3 圆形地连墙结构分载法推导过程

3.1 分载法原理

如图 1 所示，原来由圆形地下连续墙承担的水土压力 $P(\theta, z)$，分别由竖向弹性地基直梁和环向弹性地基曲梁分担。假定分担比例分别为 m 与 n，则 $m+n=1$。

在圆柱坐标系下（S 表示径向，Z 表示竖向，Θ 表示环向）圆型基坑结构上 i 点$(\theta_i,\ z_i)$的径向位移可以表示为 $w(\theta_i,\ z_i)$。为计算该点的位移，可以取 $\theta=\theta_i$ 竖向单位宽度的弹性地基曲梁，同时取 $z=z_i$ 的环向单位地基曲梁，则两个子结构的位移分别可以表示为 $w_z(\theta_i,\ z_i)$与 $w_\theta(\theta_i,\ z_i)$，它们是两个子结构各自分担荷载 $P_z(\theta_i,\ z_i)$与 $P_\theta(\theta_i,\ z_i)$的函数：

$$\left.\begin{aligned} w_z(\theta_i, z_i) &= f(P_z) \\ w_\theta(\theta_i, z_i) &= g(P_\theta) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

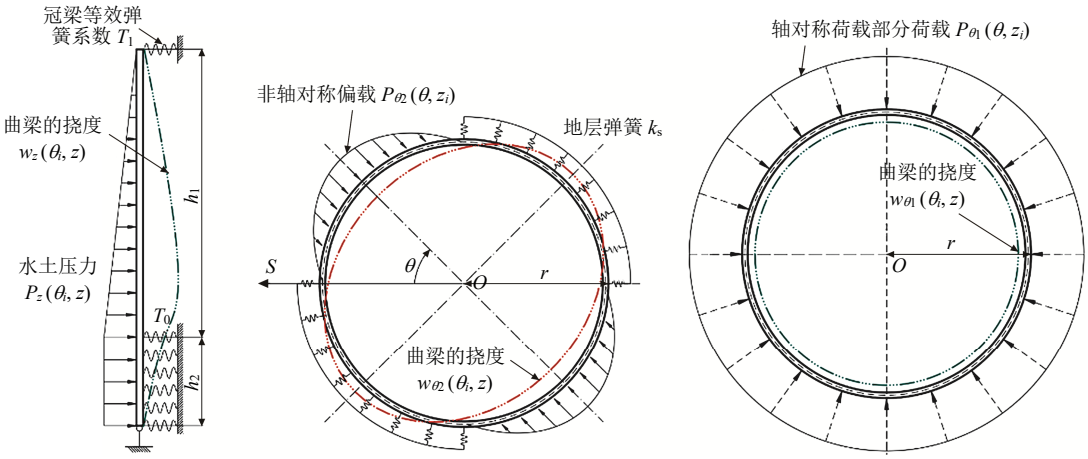
根据分担比例有如下关系：

$$\left.\begin{aligned} f(P_z) &= m \cdot P(\theta, z) = P_z(\theta_i, z) \\ g(P_\theta) &= n \cdot P(\theta, z) = P_\theta(\theta, z_i) \\ P_\theta(\theta, z_i) &= P_{\theta 1}(\theta, z_i) + P_{\theta 2}(\theta, z_i) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中：$P_z(\theta_i, z)$为竖向结构刚度承担的围压；$P_\theta(\theta, z_i)$为环向刚度承担的围压。其中$P_{\theta 1}(\theta, z_i)$、$P_{\theta 2}(\theta, z_i)$分别为环向弹性地基曲梁分担荷载沿环向分解的轴对称荷载与偏压荷载，如图 2 所示。

根据位移协调条件，竖向弹性地基直梁的位移$w_z(\theta_i, z_i)$与环向弹性地基曲梁的位移$w_\theta(\theta_i, z_i)$，在点(θ_i, z_i)上是一致的，且等于圆形地连墙在该点的径向位移$w(\theta_i, z_i)$，即

$$w(\theta_i, z_i) = w_z(\theta_i, z_i) = w_\theta(\theta_i, z_i) \tag{3}$$



(a) 竖向弹性地基梁子结构　(b) 环向弹性地基曲梁子结构 A　(c) 环向弹性地基曲梁子结构 B

图 2　圆形地连墙分载法子结构模型

Fig.2　Substructure model of circular diaphragm wall by load-sharing method

只需解出两个子结构与各自分担荷载比例相关表达式$P_z(\theta_i, z)$和$P_\theta(\theta, z_i)$即可由位移协调条件式（3）联立方程，求得子结构的荷载分担比例系数 m 与 n。再将分担系数回代到式（1），即可确定点(θ_i, z_i)的径向位移$w(\theta_i, z_i)$。根据子结构的需满足的几何方程和物理方程，还可求得各子结构的内力。求解过程须注意 m 与 n 分别是θ与 z 的函数而不是常量，即 $m = m(\theta, z)$，$n = n(\theta, z)$。

3.2　非轴对称荷载

假定由于地层的不均匀，圆形基坑结构受到水土压力$P(\theta, z)$表达式如下：

$$P(\theta,z) = \begin{cases} K_0[r_g z(1+b_t \sin 2\theta) + p_0], \\ \{(\theta,z) \mid \theta \in (0,\pi/2) \cup (\pi,3\pi/2), z \in (0,h_1)\} \\ K_0[r_g h_1(1+b_t \sin 2\theta) + p_0], \\ \{(\theta,z) \mid \theta \in (0,\pi/2) \cup (\pi,3\pi/2), z \in (h_1,h_1+h_2)\} \\ K_0(r_g z + p_0), \\ \{(\theta,z) \mid \theta \in [\pi/2,3\pi/2] \cup [3\pi/2,2\pi], z \in [0,h_{12}]\} \\ K_0(r_g h_1 + p_0), \\ \{(\theta,z) \mid \theta \in [\pi/2,3\pi/2] \cup [3\pi/2,2\pi], z \in [h_1,h_1+h_2]\} \end{cases} \tag{4}$$

式中：p_0 为地面超载；K_0 为静止土压力系数；r_g 为土的重度；h_1 为基坑开挖深度；h_2 为开挖面以下地连墙长度；$b_t \sin 2\theta$ 为偏载因子；b_t 为地层的不平衡度。由于任何荷载函数都能按三角级数展开，本文仅取一级三角函数做推导演示。按照式（4）的水土压力，下面分别给出竖向弹性地基直梁与环向弹性地基曲梁位移表达式的解析推导过程。

3.3　竖向弹性地基直梁子结构推导

如图 2(a)所示，当$\theta = \theta_i$时，取单位宽度的竖向弹性地基直梁子结构。已知其长度为 l 且 $l = h_1 + h_2$，梁的高度即为圆形地连墙的厚度 t。其弹性模量为 E，截面惯性矩为 I。弹性地基直梁分为两段，开挖面以上$[0, h_1]$范围，取弹簧系数为 0；开挖面以下$[h_1, h_1+h_2]$范围，弹簧系数取 T_0；冠梁等效弹簧系数取 T_1。假定挠度 $s = w(\theta_i, z)$，由文克尔地基梁理论[16]可以得到如下控制方程：

$$\left.\begin{aligned} EI\frac{\mathrm{d}^4 s}{\mathrm{d}z^4} + [T_1 s(0) - P_z(\theta_i, 0)] &= 0, \quad z = 0 \\ EI\frac{\mathrm{d}^4 s}{\mathrm{d}z^4} - P_z(\theta_i, z) &= 0, \quad 0 < z \leqslant h_1 \\ EI\frac{\mathrm{d}^4 s}{\mathrm{d}z^4} + [T_0 s - P_z(\theta_i, z)] &= 0, \quad h_1 < z \leqslant h_1 + h_2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

文克尔地基梁上任一截面的转角 φ_s、弯矩 M_s、剪力 Q_s 和挠度 s 的关系为

$$\varphi_s=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z},\ M_s=-EI\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}z^2},\ Q_s=-EI\frac{\mathrm{d}^3s}{\mathrm{d}z^3} \tag{6}$$

令 $\beta_i=(1+b_t\sin 2\theta)$，称 β_i 为竖向偏载放大系数，在确定的 θ_i 面上它是常数，当 $\theta\in[\pi/2,\pi]\cup[3\pi/2,2\pi]$ 时，$\beta_i=1$。根据式（4）荷载项，对 $[0,h_1]$ 范围进行积分，结合式（5）可得

$$\left.\begin{aligned}
&s_a(z)=C[1]+zC[2]+z^2C[3]+z^3C[4]+\frac{mK_0\left(z^4p_0+\frac{1}{5}r_gz^5\beta_i\right)}{24EI}\\
&\varphi_a(z)=C[2]+2zC[3]+3z^2C[4]+\frac{mK_0\left(4z^3p_0+r_gz^4\beta_i\right)}{24EI}\\
&M_a(z)=-2EI\left(C[3]+3zC[4]\right)-\frac{1}{6}mz^2K_0\left(3p_0+r_gz\beta_i\right)\\
&Q_a(z)=-6EIC[4]-\frac{1}{2}mzK_0\left(2p_0+r_gz\beta_i\right)
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中：$C[1]$、$C[2]$、$C[3]$、$C[4]$ 均为待定常数。各参数下角标 a 表示竖向弹性地基梁子结构模型上半段。

当 $z=0$ 时，考虑竖向弹性地基梁顶端点为简支弹簧，其边界条件为

$$M_a(0)=0,\ Q_a(0)=s_a(0)\cdot T_1=T_1\cdot C[1]=-6EI\cdot C[4] \tag{8}$$

式中：$M_a(0)$、$Q_a(0)$、$s_a(0)$ 分别为冠梁处弹性地基梁弯矩、剪力与挠度；$T_1=E_cA_t/R_m^2$，E_c 为冠梁混凝土的弹性模量，A_t 为冠梁横截面的面积，R_m 为冠梁中心线的半径。将式（8）代入式（7）可得

$$C[3]=0,\ C[1]=\frac{6EI\cdot R_m^2}{E_cA_t}C[4] \tag{9}$$

还需两个独立的边界条件才能确定其余两个待定系数 $C[2]$ 与 $C[4]$。

对 $[h_1,h_1+h_2]$ 开挖面以下部分，其控制方程可用弹性地基梁的初参数解法求得，求解时先做坐标变换，令 $x=z-h_1$，s_b 为开挖面以下弹性地基梁的挠度，则有

$$\left.\begin{aligned}
&s_b(x)=w_z\left(\theta_i,z-h_1\right),\\
&EI\frac{\mathrm{d}^4s}{\mathrm{d}x^4}+T_0s=mK_0\left(r_gh_1\beta_i+p_0\right)
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式（10）的通解表达式如下：

$$\left.\begin{aligned}
s_b^g(x)&=w_{b0}\cdot F1(x)+\varphi_{b0}\frac{F2(x)}{\lambda}-M_{b0}\frac{F3(x)}{\lambda^2\cdot EI}-Q_{b0}\frac{F4(x)}{\lambda^3\cdot EI}\\
\varphi_b^g(x)&=-4\lambda w_{b0}F4(x)+\varphi_{b0}F1(x)-\frac{M_{b0}}{\lambda EI}F2(x)-Q_{b0}\frac{F3(x)}{\lambda^2\cdot EI}\\
M_b^g(x)&=\frac{T_0w_{b0}}{\lambda^2}F3(x)+\frac{T_0\cdot\varphi_{b0}}{\lambda^3}F4(x)+M_{b0}\cdot F1(x)+Q_{b0}\cdot\frac{F2(x)}{\lambda}\\
Q_b^g(x)&=\frac{T_0\cdot w01}{\lambda}\cdot F2(x)+\frac{T_0\cdot\varphi_{b0}}{\lambda^2}F3(x)-4\lambda M_{b0}\cdot F4(x)+Q_{b0}\cdot F1(x)
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中：w_{b0}、φ_{b0}、M_{b0}、Q_{b0} 为 $x=0$ 或 $z=h_1$ 时，下段的初始挠度、转角、弯矩和剪力。下角标 b 表示竖向弹性地基梁子结构模型下段，上标 g 表示通解；$Fj(x)$，$j=1,2,3,4$ 是通解算子，其表达式如下：

$$\left.\begin{aligned}
F1(x)&=\cosh(\lambda x)\cdot\cos(\lambda x)\\
F2(x)&=\frac{1}{2}\left[\cosh(\lambda x)\cdot\sin(\lambda x)+\sinh(\lambda x)\cdot\cos(\lambda x)\right]\\
F3(x)&=\frac{1}{2}\sinh(\lambda x)\cdot\sin(\lambda x)\\
F4(x)&=\frac{1}{4}\left[\cosh(\lambda x)\cdot\sin(\lambda x)-\sinh(\lambda x)\cdot\cos(\lambda x)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

式中：$\lambda=[T_0/(4EI)]^{1/4}$，方程（10）的特解为

$$\left.\begin{aligned}
s_b^p(x)&=-\frac{m\left[-1+F1(x)\right]K_0\left(p_0+r_gh_1\beta_i\right)}{4ET\lambda^4}\\
\varphi_b^p(x)&=\frac{m\cdot F4(x)K_0\left(p_0+r_gh_1\beta_i\right)}{ET\lambda^3}\\
M_b^p(x)&=-\frac{m\cdot F3(x)K_0\left(p_0+r_gh_1\beta_i\right)}{\lambda^2}\\
Q_b^p(x)&=-\frac{m\cdot F3(x)K_0\left(p_0+r_gh_1\beta_i\right)}{\lambda}
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

式中：上角标 p 表示特解。方程（10）的全解为

$$\left.\begin{aligned}
&s_b(x)=s_b^g(x)+s_b^p(x),\ M_b(x)=M_b^g(x)+M_b^p(x)\\
&\varphi_b(x)=\varphi_b^g(x)+\varphi_b^p(x),\ Q_b(x)=Q_b^g(x)+M_b^p(x)
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

式（14）中含有 4 个待定常量分别为 w_{b0}、φ_{b0}、M_{b0}、Q_{b0}。至此，竖向弹性地基梁子结构模型的求解中仍然包含 6 个待定常量。由上段和下段在 $z=$

h_1 处的连续性条件，可以得到 4 个边界方程，如下：

$$\left.\begin{aligned} &s_{\mathrm{b}}(0)=w_{\mathrm{b}0}=s_{\mathrm{a}}(h_1),\ \varphi_{\mathrm{b}}(0)=\varphi_{\mathrm{b}0}=\varphi_{\mathrm{a}}(h_1)\\ &M_{\mathrm{b}}(0)=M_{\mathrm{b}0}=M_{\mathrm{a}}(h_1),\ Q_{\mathrm{b}}(0)=Q_{\mathrm{b}0}=Q_{\mathrm{a}}(h_1)\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

根据地连墙低端的边界条件可以得到剩余 2 个边界方程。若地墙插入深度较深，墙底土层力学性能较好，地层对墙体约束作用强则可视墙底为固定端，边界条件为

$$s_{\mathrm{b}}(h_2)=0,\ \varphi_{\mathrm{b}}(h_2)=0 \tag{16}$$

若地墙插入深度较浅，墙底土层力学性能较差，地层对墙体约束作用弱，可视墙底为简支端则边界条件为

$$s_{\mathrm{b}}(h_2)=0,\ M_{\mathrm{b}}(h_2)=0 \tag{17}$$

联合式（7）、（9）、（11）、（13）、（14）、（15）、（16）或式（17）可以求得竖向弹性地连墙底端固定约束时剩余 6 个待定常数 $w_{\mathrm{b}0}$、$\varphi_{\mathrm{b}0}$、$M_{\mathrm{b}0}$、$Q_{\mathrm{b}0}$、C[2]、C[4]的表达式。由于待定系数表达式过于庞杂，这里不便给出其具体形式。将待定系数表达式回代到式（7）及式（14），即可得到竖向弹性地基梁子结构模型的位移及内力表达式。

3.4　环向弹性地基曲梁子结构推导

当 $z=z_i$ 时，取单位宽度的环向弹性地基直梁子结构，根据荷载的特征将子结构模型分为轴对称和偏载模型两部分如图 2(b)、图 2(c)所示。假定环向弹性地基曲梁子结构模型挠度 $s=w_\theta(\theta,\ z_i)$ 则有

$$s(\theta)=w_\theta(\theta,z_i)=w_{\theta1}(\theta,z_i)+w_{\theta2}(\theta,z_i) \tag{18}$$

根据式（4）荷载的特点，可以将其分解为轴对称部分 $P_{\theta1}(\theta,\ z_i)$ 与非轴对称 $P_{\theta2}(\theta,\ z_i)$：

$$\left.\begin{aligned} P_{\theta1}(\theta,z_i)&=\begin{cases} nK_0(r_{\mathrm{g}}z_i+p_0),\ z_i\in[0,h_1]\\ nK_0(r_{\mathrm{g}}h_1+p_0),\ z_i\in[h_1,h_1+h_2]\end{cases}\\ P_{\theta2}(\theta,z_i)&=\begin{cases} nK_0r_{\mathrm{g}}b_{\mathrm{t}}z_i\sin2\theta,\\ \left\{(\theta,z_i)\middle|\theta\in(0,\pi/2)\cup(\pi,3\pi/2),z\in(0,h_1)\right\}\\ nK_0r_{\mathrm{g}}b_{\mathrm{t}}h_1\sin2\theta,\\ \left\{(\theta,z_i)\middle|\theta\in[0,\pi/2]\cup[\pi,3\pi/2]z\in(h_1,h_1+h_2)\right\}\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

观察环向弹性地基曲梁子结构模型 A 与模型 B，可知环向曲梁对应两种情况，一种考虑弹性地基的支撑作用，弹簧支撑刚度为 k_{s}；另一种不考虑弹性地基支撑作用，即 $k_{\mathrm{s}}=0$。模型 A 的加载段和模型 B 一样均不考虑弹性地基作用，区别仅在于荷载模式不一样，在下面推导过程中归为一类，即弹性曲梁，模型 A 与 B 区别仅为荷载不同；模型 A 的非加载段考虑了弹性地基的作用，在推导中归为另一类，即弹性地基曲梁。弹性地基曲梁挠曲微分方程表达式如下：

$$s^{(5)}(\theta)+2\cdot s^{(3)}(\theta)+s^{(1)}(\theta)=\frac{r^4}{EI}\left[q_{\mathrm{H}}^{(1)}(\theta)-k_{\mathrm{s}}\cdot s(\theta)\right] \tag{20}$$

式中：$q_{\mathrm{H}}(\theta)$ 为沿圆弧径向的分布荷载；r 为圆弧半径。上标括号中数字为求导阶次。弹性曲梁的挠曲微分方程表达式如下：

$$s^{(5)}(\theta)+2\cdot s^{(3)}(\theta)+s^{(1)}(\theta)=\frac{r^4}{EI}\left[q_{\mathrm{H}}^{(1)}(\theta)\right] \tag{21}$$

对于环向弹性地基曲梁子结构模型 A 非加载段，$q_{\mathrm{H}}(\theta)=0$；对加载段，有

$$q_{\mathrm{H}}(\theta)=nK_0r_{\mathrm{g}}b_{\mathrm{t}}\cdot z_i\sin2\theta=q_0\sin2\theta \tag{22}$$

下面分别给出模型 A 与模型 B 的位移、变形及内力的推导过程。第一，对于环向弹性地基曲梁子结构模型 A（弹性地基曲梁）的非加载段须满足方程（20），根据汤任基[17]提出的弹性基础圆环的初参数法，满足控制方程与内力微分关系的通解表达式如下：

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{i}}^{\mathrm{g}}(\theta)=&s_{\mathrm{i}0}\cdot Y2(\theta)+\frac{r\varphi_{\mathrm{i}0}}{m_\lambda^2+n_\lambda^2}\left[m_\lambda\cdot Y1(\theta)+n_\lambda\cdot Y4(\theta)\right]+\\ &\frac{u_{\mathrm{i}0}}{m_\lambda^2+n_\lambda^2}\left[m_\lambda\cdot Y1(\theta)+n_\lambda\cdot Y4(\theta)\right]+\\ &\frac{2m_\lambda n_\lambda Q_{\mathrm{i}0}}{k_{\mathrm{s}}r\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)}\left[n_\lambda\cdot Y1(\theta)-m_\lambda\cdot Y4(\theta)\right]+\\ &\frac{4m_\lambda^2n_\lambda^2M_{\mathrm{i}0}}{k_{\mathrm{s}}r^2\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)^2}\left[1-Y2(\theta)+2\cdot m_\lambda\cdot n_\lambda\cdot Y3(\theta)\right]+\\ &\frac{4m_\lambda^2n_\lambda^2N_{\mathrm{i}0}}{k_{\mathrm{s}}r\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)^2}\left[-1+Y2(\theta)+\frac{1}{2m_\lambda n_\lambda}Y3(\theta)\right] \end{aligned} \tag{23}$$

$$u_{\mathrm{l}}^{\mathrm{g}}(\theta)=u_{10}-\frac{s_{10}}{m_\lambda^2+n_\lambda^2}\left[m_\lambda\cdot Y1(\theta)+n_\lambda\cdot Y4(\theta)\right]-$$

$$\frac{r\varphi_{10}}{\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)^2}\left[1+2m_\lambda n_\lambda Y3(\theta)-Y2(\theta)\right]-$$

$$\frac{u_{10}}{\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)^2}\left[1+2m_\lambda n_\lambda Y3(\theta)-Y2(\theta)\right]+$$

$$\frac{2m_\lambda n_\lambda Q_{10}}{k_{\mathrm{s}}r\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)^2}\left[-2m_\lambda n_\lambda+2m_\lambda n_\lambda Y2(\theta)+Y3(\theta)\right]-$$

$$\frac{4m_\lambda^2n_\lambda^2M_{l0}}{k_{\mathrm{s}}r^2\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)^2}\left[\theta+\frac{m_\lambda\left(2n_\lambda^2-1\right)}{m_\lambda^2+n_\lambda^2}Y1(\theta)+\right.$$

$$\left.\frac{n\left(-2m_\lambda^2-1\right)}{m_\lambda^2+n_\lambda^2}Y4(\theta)\right]-\frac{4m_\lambda^2n_\lambda^2N_{l0}}{k_{\mathrm{s}}r\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)^2}\cdot$$

$$\left[-\theta+\frac{2m_\lambda^2+1}{2m_\lambda\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)}Y1(\theta)+\frac{2n_\lambda^2-1}{2n_\lambda\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)}Y4(\theta)\right] \tag{24}$$

$$\varphi_{\mathrm{l}}^{\mathrm{g}}(\theta)=-\frac{s_{\mathrm{l}}^{\mathrm{g}}(\theta)}{r}+\frac{s_{10}\left[-m_\lambda\cdot Y1(\theta)+n_\lambda\cdot Y4(\theta)\right]}{r}+$$

$$\varphi_{10}\cdot Y2(\theta)+\frac{u_{10}\cdot Y2(\theta)}{r}+\frac{2m_\lambda n_\lambda Q_{10}\cdot Y3(\theta)}{k_{\mathrm{s}}\cdot r^2}+$$

$$\frac{4m_\lambda^2n_\lambda^2M_{10}}{k_{\mathrm{s}}r^3\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)}\left[m_\lambda\cdot Y1(\theta)+n_\lambda\cdot Y4(\theta)\right]+$$

$$\frac{2m_\lambda n_\lambda N_{10}}{k_{\mathrm{s}}r^2\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)}\left[-n_\lambda\cdot Y1(\theta)+m_\lambda\cdot Y4(\theta)\right] \tag{25}$$

$$M_{\mathrm{l}}^{\mathrm{g}}(\theta)=\frac{-k_{\mathrm{s}}r^2s_{01}}{2m_\lambda n_\lambda}Y3(\theta)+\frac{k_{\mathrm{s}}r^3\varphi_{10}}{2m_\lambda n_\lambda\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)}\cdot$$

$$\left[-n_\lambda\cdot Y1(\theta)+m_\lambda\cdot Y4(\theta)\right]+\frac{k_{\mathrm{s}}r^2u_{10}}{2m_\lambda n_\lambda\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)}\cdot$$

$$\left[-n_\lambda\cdot Y1(\theta)+m_\lambda\cdot Y4(\theta)\right]+\frac{rQ_{10}}{\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)}\left[m_\lambda\cdot Y1(\theta)+\right.$$

$$\left.n_\lambda\cdot Y4(\theta)\right]+\frac{M_{10}}{\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)^2}\left[1+4m_\lambda^2n_\lambda^2Y2(\theta)+\right.$$

$$\left.2m_\lambda n_\lambda Y3(\theta)\right]+\frac{rN_{10}}{\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)^2}\left[-1+Y2(\theta)-2m_\lambda n_\lambda Y3(\theta)\right] \tag{26}$$

$$Q_{\mathrm{l}}^{\mathrm{g}}(\theta)=\frac{-k_{\mathrm{s}}rs_{10}}{2m_\lambda n_\lambda}\left[m_\lambda\cdot Y4(\theta)+n_\lambda\cdot Y1(\theta)\right]+$$

$$\frac{k_{\mathrm{s}}r^2\varphi_{10}}{2m_\lambda n_\lambda}\left[-Y3(\theta)\right]+\frac{k_{\mathrm{s}}ru_{10}}{2m_\lambda n_\lambda}\left[-Y3(\theta)\right]+$$

$$Q_{10}\cdot Y2(\theta)+\frac{2m_\lambda n_\lambda M_{10}}{r\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)}\left[-n_\lambda Y1(\theta)+m_\lambda Y4(\theta)\right]-$$

$$\frac{N_{10}}{\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)}\left[m_\lambda Y1(\theta)+n_\lambda Y4(\theta)\right] \tag{27}$$

$$N_{\mathrm{l}}^{\mathrm{g}}(\theta)=rq_{\mathrm{H}}(\theta)-\frac{k_{\mathrm{s}}rs_{10}}{2m_\lambda n_\lambda}Y3(\theta)-$$

$$\frac{kr^2\varphi_{10}}{2m_\lambda n_\lambda\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)}\left[-m_\lambda\cdot Y4(\theta)+n_\lambda\cdot Y1(\theta)\right]-$$

$$\frac{k_{\mathrm{s}}ru_{10}}{2m_\lambda n_\lambda\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)}\left[-m_\lambda\cdot Y4(\theta)+n_\lambda\cdot Y1(\theta)\right]+$$

$$\frac{Q_{10}}{m_\lambda^2+n_\lambda^2}\left[m_\lambda\cdot Y1(\theta)+n_\lambda\cdot Y4(\theta)\right]-\frac{4m_\lambda^2n_\lambda^2M_{10}}{r\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)^2}\cdot$$

$$\left[1-Y2(\theta)-\frac{Y3(\theta)}{2m_\lambda n_\lambda}\right]-\frac{4m_\lambda^2n_\lambda^2N_{10}}{\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)^2}\left[-1+\frac{Y3(\theta)}{2m_\lambda n_\lambda}-\frac{Y2(\theta)}{4m_\lambda^2n_\lambda^2}\right] \tag{28}$$

式中：$s_{\mathrm{l}}^{\mathrm{g}}(\theta)$、$u_{\mathrm{l}}^{\mathrm{g}}(\theta)$、$\varphi_{\mathrm{l}}^{\mathrm{g}}(\theta)$、$M_{\mathrm{l}}^{\mathrm{g}}(\theta)$、$Q_{\mathrm{l}}^{\mathrm{g}}(\theta)$、$N_{\mathrm{l}}^{\mathrm{g}}(\theta)$分别为曲梁$\theta$截面的径向位移（挠度）、环向位移、截面转角、截面弯矩、截面剪力、截面轴力，上标g表示的是通解，下标l表示弹性地基曲梁段；s_{10}、u_{10}、φ_{10}、M_{10}、Q_{10}、N_{10}为弹性地基曲梁起点处（$\theta=\theta_0$时）的初始值；m_λ、n_λ均为参数；$Yj(x)$，$j=1, 2, 3, 4$为通解算子：

$$\left.\begin{aligned}Y1(\theta)&=\sin\left(m_\lambda\theta\right)\cdot\cosh\left(n_\lambda\theta\right)\\Y2(\theta)&=\cos\left(m_\lambda\theta\right)\cdot\cosh\left(n_\lambda\theta\right)\\Y3(\theta)&=\sin\left(m_\lambda\theta\right)\cdot\sinh\left(n_\lambda\theta\right)\\Y4(\theta)&=\cos\left(m_\lambda\theta\right)\cdot\sinh\left(n_\lambda\theta\right)\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

参数m_λ、n_λ与弹性地基曲梁的截面抗弯刚度有关，即

$$m_\lambda=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{1+\lambda_1}+\frac{1}{2}}\ ,\ n_\lambda=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{1+\lambda_1}-\frac{1}{2}} \tag{30}$$

式中：$\lambda_1=r^4k_{\mathrm{s}}/(EI)$，当方程（20）中$q_{\mathrm{H}}(\theta)\neq0$时，可以仿照弹性地基梁初参数方法求得有荷载$q_{\mathrm{H}}(\theta)$时的特解表达式。

$$
\left.\begin{aligned}
s_1^{\mathrm{p}}(\theta)&=\int_{\theta_{\mathrm{p}}}^{\theta}\left\{\frac{2m_\lambda n_\lambda}{k_{\mathrm{s}}\cdot r\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)}\left[n_\lambda\cdot Y1\left(\xi-\theta_{\mathrm{q}}\right)-m_\lambda\cdot Y4\left(\xi-\theta_{\mathrm{q}}\right)\right]\right\}q_{\mathrm{H}}(\xi)r\mathrm{d}\xi\\
u_1^{\mathrm{p}}(\theta)&=\int_{\theta_{\mathrm{p}}}^{\theta}\left\{\frac{2\cdot m_\lambda n_\lambda}{k_{\mathrm{s}}r\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)^2}\left[-2m_\lambda n_\lambda+2m_\lambda n_\lambda Y2\left(\xi-\theta_{\mathrm{q}}\right)+Y3\left(\xi-\theta_{\mathrm{q}}\right)\right]\right\}q_{\mathrm{H}}(\xi)r\mathrm{d}\xi\\
\varphi_1^{\mathrm{p}}(\theta)&=\int_{\theta_{\mathrm{p}}}^{\theta}\left\{\frac{-2m_\lambda n_\lambda}{k_{\mathrm{s}}\cdot r^2\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)}\left[n_\lambda Y1\left(\xi-\theta_{\mathrm{q}}\right)-m_\lambda Y4\left(\xi-\theta_{\mathrm{q}}\right)\right]+\frac{2m_\lambda n_\lambda Y3\left(\xi-\theta_{\mathrm{q}}\right)}{k_{\mathrm{s}}\cdot r^2}\right\}q_{\mathrm{H}}(\xi)r\mathrm{d}\xi\\
M_1^{\mathrm{p}}(\theta)&=\int_{\theta_{\mathrm{p}}}^{\theta}\left\{\frac{r}{\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)}\left[m_\lambda\cdot Y1\left(\xi-\theta_{\mathrm{q}}\right)+n_\lambda\cdot Y4\left(\xi-\theta_{\mathrm{q}}\right)\right]\right\}q_{\mathrm{H}}(\xi)r\mathrm{d}\xi\\
Q_1^{\mathrm{p}}(\theta)&=\int_{\theta_{\mathrm{p}}}^{\theta}\left[Y2\left(\xi-\theta_{\mathrm{q}}\right)\right]q_{\mathrm{H}}(\xi)r\mathrm{d}\xi\ ,\ N_1^{\mathrm{p}}(\theta)=\int_{\theta_{\mathrm{p}}}^{\theta}\left\{\frac{\left[m_\lambda\cdot Y1\left(\xi-\theta_{\mathrm{q}}\right)+n_\lambda\cdot Y4\left(\xi-\theta_{\mathrm{q}}\right)\right]}{\left(m_\lambda^2+n_\lambda^2\right)}\right\}q_{\mathrm{H}}(\xi)r\mathrm{d}\xi
\end{aligned}\right\}\qquad(31)
$$

式中：θ_{q}为分布荷载的起点角度。当荷载时集中荷载或者集中力偶时，特解求解方法相同，不在此赘述了。弹性地基曲梁全解表达式即为

$$
\left.\begin{aligned}
&s_1(\theta)=s_1^{\mathrm{g}}(\theta)+s_1^{\mathrm{p}}(\theta)\ ,\ u_1(\theta)=u_1^{\mathrm{g}}(\theta)+u_1^{\mathrm{p}}(\theta)\\
&\varphi_1(\theta)=\varphi_1^{\mathrm{g}}\left(\theta\right)+\varphi_1^{\mathrm{p}}(\theta)\ ,\ M_1(\theta)=M_1^{\mathrm{g}}(\theta)+M_1^{\mathrm{p}}(\theta)\\
&Q_1(\theta)=Q_1^{\mathrm{g}}(\theta)+Q_1^{\mathrm{p}}(\theta)\ ,\ N_1(\theta)=N_1^{\mathrm{g}}(\theta)+N_1^{\mathrm{p}}(\theta)
\end{aligned}\right\}\qquad(32)
$$

环向弹性地基曲梁子结构模型A的加载段属弹性曲梁，对于弹性曲梁满足控制方程（21）通解表达式如下：

$$
\begin{aligned}
s_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}(\theta)=&\ s_{\mathrm{e}0}\cos\theta+r\varphi_{\mathrm{e}0}\sin\theta+u_{\mathrm{e}0}\sin\theta+\\
&\frac{r^3Q_{\mathrm{e}0}}{EI}\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\theta\cos\theta\right)+\frac{r^2M_{\mathrm{e}0}}{EI}\cdot\\
&\left(1-\cos\theta\right)+\frac{r^3N_{\mathrm{e}0}}{EI}\left(-1+\cos\theta+\frac{\theta}{2}\sin\theta\right)
\end{aligned}\qquad(33)
$$

$$
\begin{aligned}
u_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}\theta=&-s_{\mathrm{e}0}\sin\theta+r\varphi_{\mathrm{e}0}\left(\cos\theta-1\right)+u_{\mathrm{e}0}\cos\theta+\\
&\frac{r^3Q_{\mathrm{e}0}}{EI}\left(-1+\cos\theta+\frac{\theta}{2}\sin\theta\right)+\frac{r^2M_{\mathrm{e}0}}{EI}\left(\sin\theta-\theta\right)+\\
&\frac{r^3N_{\mathrm{e}0}}{EI}\left(\theta-\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\theta\cos\theta\right)
\end{aligned}\qquad(34)
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}(\theta)=&\frac{M_{\mathrm{e}0}r\theta}{EI}+\varphi_{\mathrm{e}0}+\frac{Q_{\mathrm{e}0}\left(r^2-r^2\cos\theta\right)}{EI}+\\
&\frac{N_{\mathrm{e}0}\left(-r^2\theta+r^2\sin\theta\right)}{EI}
\end{aligned}\qquad(35)
$$

$$
M_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}(\theta)=rQ_{\mathrm{e}0}\sin\theta+M_{\mathrm{e}0}+rN_{\mathrm{e}0}\left(\cos\theta-1\right)\qquad(36)
$$

$$
Q_1^{\mathrm{g}}(\theta)=Q_{\mathrm{e}0}\cdot\cos\theta-N_{\mathrm{e}0}\cdot\sin\theta\qquad(37)
$$

$$
N_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}(\theta)=N_{\mathrm{e}0}\cos\theta+Q_{\mathrm{e}0}\sin\theta\qquad(38)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&s_{\mathrm{e}}(0)=s_1(0)\ ,\ u_{\mathrm{e}}(0)=u_1(0)\ ,\ \varphi_{\mathrm{e}}(0)=\varphi_1(0)\\
&M_{\mathrm{e}}(0)=M_1(0)\ ,\ Q_{\mathrm{e}}(0)=Q_1(0)\ ,\ N_{\mathrm{e}}(0)=N_1(0)
\end{aligned}\right\}\qquad(39)
$$

式中：$s_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}(\theta)$、$u_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}(\theta)$、$\varphi_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}(\theta)$、$M_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}(\theta)$、$Q_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}(\theta)$、$N_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}(\theta)$分别为曲梁$\theta$截面的径向位移（挠度）、环向位移、截面转角、截面弯矩、截面剪力、截面轴力，上标g表示的是通解，下标e表示弹性曲梁段；$s_{\mathrm{e}0}$、$u_{\mathrm{e}0}$、$\varphi_{\mathrm{e}0}$、$M_{\mathrm{e}0}$、$Q_{\mathrm{e}0}$、$N_{\mathrm{e}0}$为弹性曲梁起点处（$\theta=\theta_0$时）的初始值。按式（22）假定的径向分布荷载为$q_{\mathrm{H}}(\theta)=q_0\sin2\theta$，$q_0=nK_0b_tz_i$，类似式（31）通过积分可得方程（21）的特解表达式如下：

$$
\left.\begin{aligned}
s_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}(\theta)=&\frac{q_0r^4\left\{3\left(-\theta+\theta_{\mathrm{q}}\right)\left[\cos\left(\theta-3\theta_{\mathrm{q}}\right)+3\cos\left(\theta+\theta_{\mathrm{q}}\right)\right]+4\sin(2\theta)+4\sin\left(\theta-3\theta_{\mathrm{q}}\right)\right\}}{36EI}\\
u_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}(\theta)=&q_0r^4\frac{\left[2\cos2\theta+7\cos\left(\theta-3\theta_{\mathrm{q}}\right)-18\cos\left(2\theta_{\mathrm{q}}\right)+\right]}{36EI}+q_0r^4\frac{9\cos\left(\theta+\theta_{\mathrm{q}}\right)+3\left(\theta-3\theta_{\mathrm{q}}\right)\left[\sin\left(\theta-3\theta_{\mathrm{q}}\right)+3\sin\left(\theta+\theta_{\mathrm{q}}\right)\right]}{36EI}\\
\varphi_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}(\theta)=&\frac{4q_0r^3\sin^3\left(\frac{\theta-\theta_{\mathrm{q}}}{2}\right)\sin\left[\frac{1}{2}\left(\theta+3\theta_{\mathrm{q}}\right)\right]}{3EI}\\
M_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}(\theta)=&\frac{1}{6}q_0r^2\left[-2\sin2\theta+\sin\left(\theta-3\theta_{\mathrm{q}}\right)+3\sin\left(\theta+\theta_{\mathrm{q}}\right)\right]\\
Q_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}(\theta)=&\frac{1}{6}q_0r\left[-4\cos2\theta+\cos\left(\theta-3\theta_{\mathrm{q}}\right)+3\cos\left(\theta+\theta_{\mathrm{q}}\right)\right]\\
N_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}(\theta)=&\frac{1}{6}q_0r\left[-2\sin2\theta+\sin\left(\theta-3\theta_{\mathrm{q}}\right)+3\sin\left(\theta+\theta_{\mathrm{q}}\right)\right]
\end{aligned}\right\}
$$

（40）

当荷载时集中荷载或者集中力偶时，特解求解方法相同，不在此赘述了。弹性曲梁全解表达式即为

$$\left.\begin{aligned} &s_{\mathrm{e}}(\theta)=s_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}(\theta)+s_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}(\theta),\ u_{\mathrm{e}}(\theta)=u_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}(\theta)+u_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}(\theta)\\ &\varphi_{\mathrm{e}}(\theta)=\varphi_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}(\theta)+\varphi_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}(\theta)\\ &M_{\mathrm{e}}(\theta)=M_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}(\theta)+M_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}(\theta),\ Q_{\mathrm{e}}(\theta)=Q_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}(\theta)+Q_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}(\theta)\\ &N_{\mathrm{e}}(\theta)=N_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}(\theta)+N_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}(\theta)\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

弹性地基曲梁和弹性曲梁的解析表达式（32）与式（41）含有 $s_{\mathrm{e}0}$、$u_{\mathrm{e}0}$、$\varphi_{\mathrm{e}0}$、$M_{\mathrm{e}0}$、$Q_{\mathrm{e}0}$、$N_{\mathrm{e}0}$、s_{10}、u_{10}、φ_{10}、M_{10}、Q_{10}、N_{10}等共 12 个待定常数。这些待定常数由特定的边界条件来确定。环向弹性地基曲梁子结构模型 A，图中虚点划线为两条对称轴，按照对称性原理可取模型的 1/4 进行分析，如图 3 所示。

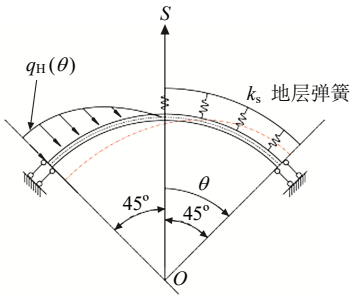


图 3 环向弹性地基曲梁子结构模型 A 四分之一模型

Fig.3 Quarter model of substructure model A of curved beam on circumferential elastic foundation

在$\theta=0$处有连续性条件，可建立 6 个独立方程；在$\theta=\pi/4$、$\theta=-\pi/4$ 处有如下内力和位移条件，也可建立 6 个独立方程：

$$\left.\begin{aligned} &Q_{\mathrm{e}}(\pi/4)=0,\ u_{\mathrm{e}}(\pi/4)=0,\ \varphi_{\mathrm{e}}(\pi/4)=0\\ &Q_{1}(\pi/4)=0,\ u_{1}(\pi/4)=0,\ \varphi_{1}(\pi/4)=0\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

由此可以求解模型 A 中所有的 12 个待定常数。

上述求解是在 $0\leqslant z_{\mathrm{i}}<h_1$ 范围内，模型 A 分解为无荷载的弹性地基曲梁和加荷载的弹性曲梁两段的情况。对于 $h\leqslant z_{\mathrm{i}}<h_1+h_2$ 范围，模型 A 则分解为加荷载的弹性地基曲梁和无荷载的弹性地基曲梁段，对于这种情况只需将其中的弹性曲梁加载段换成弹性地基曲梁加载段即可，且边界条件也是相同的，只需注意区分不同分段符号标记即可，这里不再赘述。

环向弹性地基曲梁子结构模型 B 是轴对称荷载下的弹性曲梁，它也应满足方程（21），需要说明的是模型图 2(c)仅展示了 $0\leqslant z_{\mathrm{i}}<h_1$，开挖面以上的受力简图，对于开挖面以下 $h\leqslant z_{\mathrm{i}}<h_1+h_2$ 的情况，图 2(c)内圈还存在被动区的土弹簧，弹簧刚度系数假定也取 K_{s}，则由于荷载轴对称，在圆柱坐标系下容易给出其解答为

$$\left.\begin{aligned} &N_{\mathrm{e}}(\theta)=\begin{cases}nK_0\left(r_{\mathrm{g}}z_{\mathrm{i}}+p_0\right)r, & 0\leqslant z_{\mathrm{i}}<h_1\\ \dfrac{nK_0r\left(r_{\mathrm{g}}h_1+p_0\right)}{1+k_{\mathrm{s}}/k_{\mathrm{d}}}, & h_1\leqslant z_{\mathrm{i}}\leqslant h_1+h_2\end{cases}\\ &s_{\mathrm{z}}(\theta)=\begin{cases}\dfrac{nK_0\left(r_{\mathrm{g}}z_{\mathrm{i}}+p_0\right)r^2}{Et}, & 0\leqslant z_{\mathrm{i}}<h_1,\\ \dfrac{q_0r^2}{Ehb/r^2+k_{\mathrm{s}}}, & h_1\leqslant z_{\mathrm{i}}\leqslant h_1+h_2\end{cases}\\ &u_{\mathrm{e}}(\theta)=0,\ \varphi_{\mathrm{e}}(\theta)=0,M_{\mathrm{e}}(\theta)=0,\ Q_{\mathrm{e}}(\theta)=0\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

式中：$k_{\mathrm{d}}=Ehb/r^2$。至此给出竖向与环向两个子结构的全部位移、变形及内力解答表达式。

3.5 分载法计算流程

得到两个子结构解析表达后，由位移协调条件可以求得竖向弹性地基直梁的分担比例函数 $m=m(\theta,z)$与环形弹性地基曲梁 $n=n(\theta,z)$，回代到各子模型位移及内力表达式（7）、（14）、（32）、（41）即可求问题最终解。基于分载法原理圆形地连墙空间受力计算法可图 4 具体流程计算。

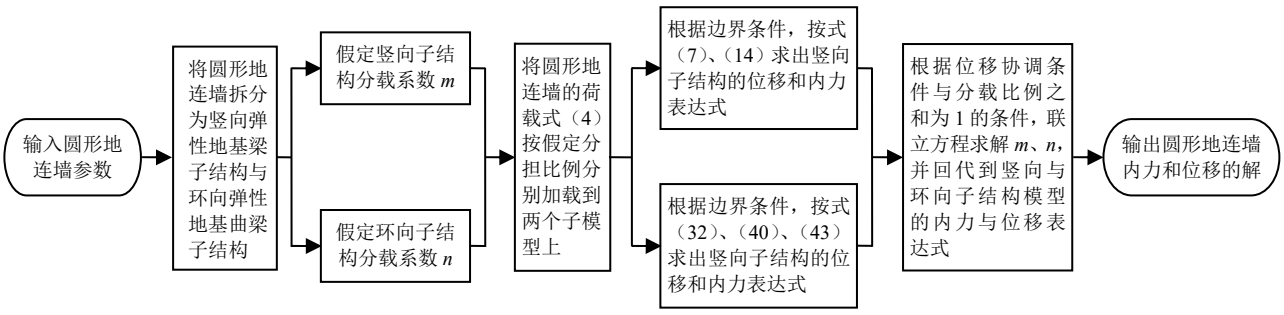


图 4 基于分载法的圆形地连墙内力和位移解析流程图

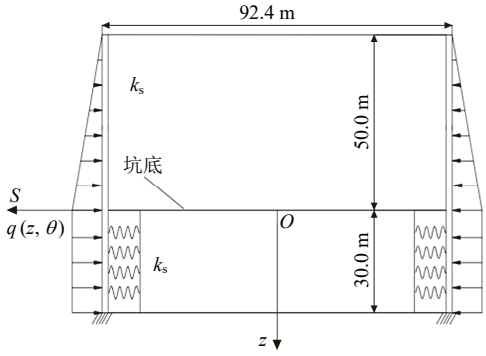
Fig.4 Flow chart for force and displacement of circular diaphragm wall by load-sharing method

4　典型圆形基坑计算案例

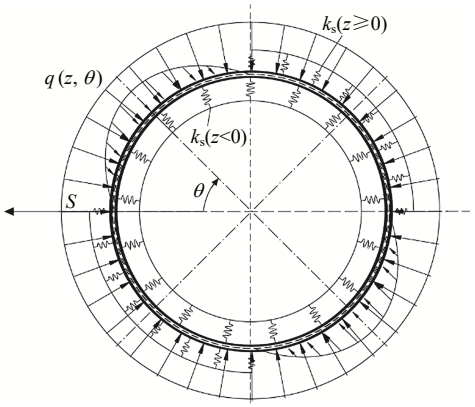
4.1　某圆形基坑偏载计算案例 1

某 25 万方薄膜罐 LNG 地下储罐圆形基坑，直径为 92.4 m，开挖深度为 50 m，地下连续墙厚度为 1.5 m，插入深度为 30 m，无内支撑。土层重度为 18 kN/m^3，土压力系数 K_0 取 0.6，地层的不平衡度为 b_t 取 0.05，地层弹簧系数为 3.0×10^4 kN/m^3。地连墙用 C40 混凝土，弹性模量为 3.25×10^7 kPa，泊松比为 0.2，抗压强度设计值为 19.1 MPa。以有限元模拟和本文分载法分别计算并对比分析，其受力简图如 5 所示。

$$q(z,\ \theta)=\begin{cases}50\times(1+\sin 2\theta)\ , \\ \quad (0\leqslant z<30\ ,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2\cup\pi\leqslant\theta\leqslant 3\pi/2) \\ 10\times(50+z)\times(1+0.05\sin 2\theta)\ , \\ \quad (-50\leqslant z\leqslant 0,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2\cup\pi\leqslant\theta\leqslant 3\pi/2)\end{cases}$$



(a) 受力简图剖面图



(b) 受力简图俯视图

图 5　某 LNG 圆形基坑地连墙受力简图

Fig.5　Load diagram of an LNG circular diaphragm wall

图 5(a)给出了荷载函数 $q(\theta,\ z)$的表达式，其单位为 kN/m，圆柱坐标原点在基坑底面中心，图 5(b)俯视图中将荷载分解成轴对称的部分（外圈圆环加载）和非轴对称的部分（内圈 1、3 象限加载）。由于模型对称性，根据前述理论推导，“分载法”计算时可以按 1/4 模型来求解，求解范围为[−π/4, π/4]。分载法与有限元计算（荷载结构法）的位移结果对比如图 6 所示。

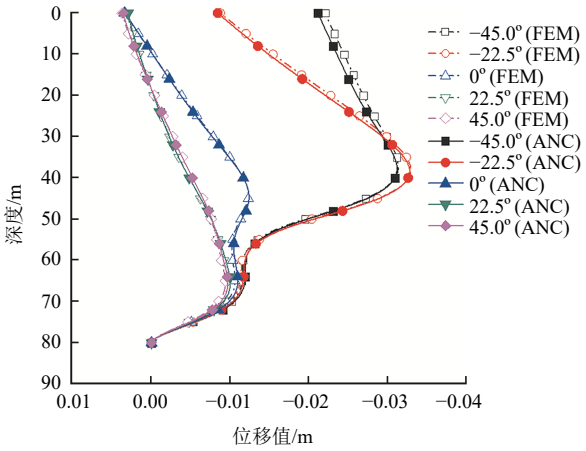


图 6　有限元与分载法计算位移对比

Fig.6　Comparison of displacement calculation between finite element method and load-sharing method

图 6 中 FEM 代表有限元的结果，ANC 代表用分载法计算的解析解。图中曲线表示 θ 等于−45.0°、−22.5°、0°、22.5°、45.0°的径向位移。显然有限元与分载法计算的位移结果基本吻合，在 Z = 0 的上边界上误差略大，最大误差也不超过 3%，说明本文将圆形基坑圆柱壳结构分解为竖向弹性地基直梁与环向弹性地基曲梁的分载法是正确的。

分载法计算得到的竖向弹性地基梁的分担系数 m 与环向弹性地基曲梁分担系数 n，均是空间坐标的函数，这里按 1/4 模型仅展示开挖面以上的结果，如图 7 与图 8 所示，两个等高线热图分别表示

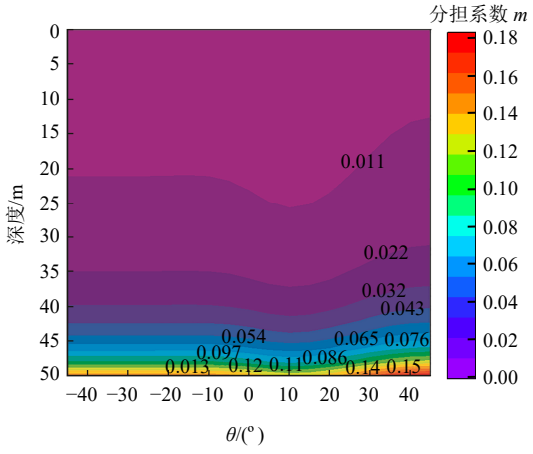


图 7　竖向弹性地基梁的荷载分担系数 m

Fig.7　Load sharing coefficient m for vertical elastic foundation beams

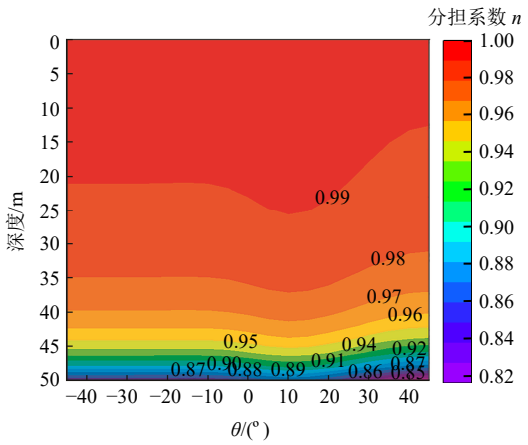


图 8 环向弹性地基曲梁的荷载分担系数 *n*

Fig.8 Load sharing coefficient *n* for curved beams on circumferential elastic foundation

竖向弹性地基梁的分担系数 m 与环向弹性地基曲梁的分担系数 n，两者在同一点之和为 1。

由图可知：

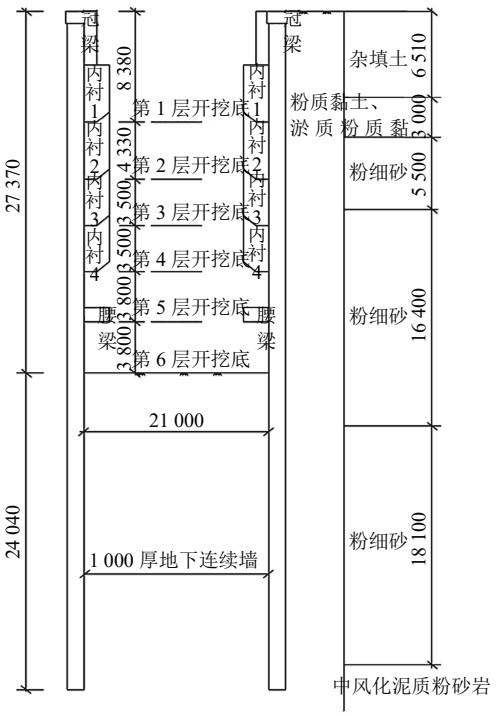
（1）分担系数 m、n 是空间坐标的函数，它们随深度和角度（当荷载不是轴对称均载时）变化。

（2）在开挖面以上，竖向弹性地基梁的分担系数 m 较小，占比一般不超过 10%，并且随着开挖深度不断变化，从基坑顶部到开挖面逐渐增大。环向弹性地基曲梁的分担系数 n 较大，占比超过 85%，从基坑顶部到开挖面逐渐减小。说明开挖面以上位置，环向弹性地基曲梁子结构承担了主要的外荷载。换言之，地下连续墙的环向刚度起了绝对主导作用。

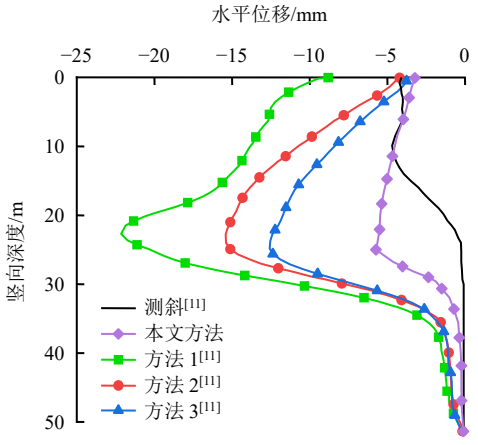
4.2 某圆形基坑工程位移计算对比验证

某基坑剖面图如图 9(a)所示，内衬钢筋混凝土结构壁厚为 1.5 m、外径为 21 m，基坑开挖深度为 27.37 m，混凝土等级为 C35；地连墙厚度为 1 m，混凝土等级为 C40，土体参数与施工工序详见参考文献[11]。按照开挖工况，按本文方法分步计算开挖至坑底时地连墙的水平位移并与文献[11]结果进行对比，结果如图 9(b)所示。

根据文献[11]所述，图 9(b)中方法 1 为常规增量法弹性地基梁法；方法 2 为考虑地下连续墙环向抗压刚度的增量法弹性地基梁法（等效刚度）；方法 3 为考虑地下连续墙环向抗压刚度的增量法弹性地基梁法；本文方法为考虑环向刚度的弹性地基曲梁的圆形基坑分载法，黑色曲线为施工过程中测斜管实测的水平位移。对比可知，本文计算方法最为接近实际测量的水平位移；而方法 1 没有考虑圆形地连墙环向刚度的影响，结果明显偏大；方法 2、3 虽然考虑环向刚度，但是将圆形基坑当成平面弹性地基梁忽略了其空间作用，因此仍然存较大误差。



(a) 基坑剖面图（尺寸单位：mm）



(b) 不同方法地连墙径向位移对比

图 9 某圆形基坑剖面图及开挖至坑底时的水平位移

Fig.9 Sectional drawing of a circular foundation pit and horizontal displacement when excavated to the bottom

5 结 论

利用分载法原理将圆形基坑三维柱壳问题转化为环向弹性地基曲梁与竖向弹性地基直梁组合问题，并且给出了在环向非轴对称的荷载下，圆形地连墙位移与内力的详细理论推导。该理论非常直观地反映了结构参数与内力变形的相互关系，为圆形基坑围护结构设计提供有益的指导，能够丰富圆形深基坑的计算理论。通过典型圆形基坑计算案例分析得到以下结论。

（1）分载法与荷载结构法的有限单元法分析进

行对比。不同角度的侧向位移计算结果的最大误差小于 3%，验证了本文解析方法的准确性。

（2）以 25 万 m^3 LNG 地下储罐基坑为例，在开挖面以上，竖向弹性地基梁的分担系数 m 较小，占比一般不超过 10%，并且随着开挖深度不断变化，从基坑顶部到开挖面逐渐增大。环向弹性地基曲梁的分担系数 n 较大，占比超过 85%，从基坑顶部到开挖面逐渐减小。说明开挖面以上位置，环向弹性地基曲梁子结构承担了主要的外荷载，换言之地下连续墙的环向刚度起了绝对主导作用。

（3）通过与某圆形基坑监测数据进行对比，验证了本文分析方法由于充分考虑了圆形结构的空间性能，其计算结果较常规增量法弹性地基梁法及其改进方法相比与实测结果更为接近。

参 考 文 献

[1] 董新平, 郭庆海, 周顺华. 圆型基坑的变形特点及主要影响因素分析[J]. 地下空间与工程学报, 2005, 1(2): 196-199.
DONG Xin-ping, GUO Qing-hai, ZHOU Shun-hua. Character and factor analysis of deformation of diaphragm wall in the cylindrical foundation pit[J]. **Chinese Journal of Underground Space and Engineering**, 2005, 1(2): 196-199.

[2] LIU H Z, LIU X R, ZHOU X H, et al. Study on spatiotemporal evolution laws and deformation characteristics of circular deep and large foundation pits in soft soils[J]. **Arabian Journal for Science and Engineering**, 2024, 49: 13975-13999.

[3] 翟杰群, 谢小林, 贾坚.“上海中心”深大圆形基坑的设计计算方法研究[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(增刊 1): 392-396.
ZHAI Jie-qun, XIE Xiao-lin, JIA Jian. Design method for large-deep circular foundation pit of Shanghai Tower[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2010, 32(Suppl.1): 392-396.

[4] 乔亚飞, 闫凯, 赵腾腾, 等. 软土地区超深圆形竖井的坑底隆起特性与机制[J]. 岩土力学, 2023, 44(9): 2707-2716.
QIAO Ya-fei, YAN Kai, ZHAO Teng-heng, et al. Characteristics and mechanism of bottom uplift of ultra-deep circular shaft in soft soil area[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2023, 44(9): 2707-2716.

[5] HANIFAH Hermil Rizki, RAHARDJO Paulus Pramono, LIM Aswin. 砂土地层圆形深基坑三维分析与测斜仪测量[J]. 岩土力学, 2023, 44(4): 1142-1152.
HANIFAH Hermil Rizki, RAHARDJO Paulus Pramono, LIM Aswin. Three-dimensional analysis and clinometer measurement of round deep foundation pit in sand stratum[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2023, 44(4): 1142-1152.

[6] 娄西慧, 郭雪岩, 周小涵. 软土地层深大圆形锚碇基坑开挖稳定性研究[J]. 公路, 2022(10): 169-174.
LOU Xi-hui, GUO Xue-yan, ZHOU Xiao-han. Research on excavation stability of deep circular anchorage foundation pit in soft soil layer[J]. **Highway**, 2022(10): 169-174.

[7] 上海市住房和城乡建设管理委员会. DG/TJ 08-61－2018 基坑工程技术标准[S]. 上海: 同济大学出版社, 2018.
Shanghai Municipal Commission of Housing and Urban Rural Development Management. DG/TJ 08-61－2018 Technical code for excavation engineering[S]. Shanghai: Tongji University Press, 2018.

[8] 中交公路规划设计院有限公司. JTG3363－2019 公路桥涵地基与基础设计规范[S]. 北京: 人民交通出版社, 2019.
CCCC Highway Consultants Co., Ltd. JTG3363－2019 Code for design of ground base and foundation of highway bridges and culverts[S]. Beijing: China Communications Press, 2019.

[9] 刘波.“上海中心”塔楼深大圆形基坑形状的实测分析[J]. 地下空间与工程学报, 2018, 14(增刊 1): 299-307.
LIU Bo. Measurement and analysis on characteristic for large-deep foundation pit of Shanghai Tower[J]. **Chinese Journal of Underground Space and Engineering**, 2018, 14(Suppl.1): 299-307.

[10] TAN Y, LU Y, XU C J, et al. Investigation on performance of a large circular pit-in-pit excavation in clay gravel-cobble mixed strata[J]. **Tunnelling and Underground Space Technology**, 2018, 79: 356-374.

[11] 林克昌, 边风青. 超深圆形基坑地下连续墙的实用计算方法[J]. 施工技术, 2024, 53(11): 115-120.
LIN Ke-chang, BIAN Feng-qing. Practical calculation method of diaphragm wall for ultra-deep circular exaction[J]. **Construction Technology**, 2024, 53(11): 115-120.

[12] 潘泓, 曹华先, 吴世明, 等. 深基坑开挖中圆形支护结构性状分析[J]. 工业建筑, 1999, 29(5): 1-4.
PAN Hong, CAO Hua-xian, WU Shi-ming, et al. Analysis on the circle style retaining structure for deep excavation[J]. **Industrial Construction**, 1999, 29(5): 1-4.

[13] 杨骁, 任凯凯, 盛棋楸. 刚性环梁支撑圆形基坑支护结构变形解析解[J]. 力学季刊, 2020, 41(4): 684-694.
YANG Xiao, REN Kai-kai, SHENG Qi-qiu. Analytical solution for deformation of circular foundation pit support structure supported by rigid ring beam[J]. **Chinese Quarterly of Mechanics**, 2020, 41(4): 684-694.

[14] 欧阳煜, 高云飞, 任凯凯. 弹性环梁支撑下圆形深基坑支护结构变形解析解[J]. 上海大学学报(自然科学版), 2024, 30(1): 128-139.
OU Yang-yu, GAO Yun-fei, REN Kai-kai. Deformation analytical solution for a retaining structure with an elastic support ring beam of a circular deep foundation pit[J]. **Journal of Shanghai University (Natural Science Editon)**, 2024, 30(1): 128-139.

[15] 崔剑峰, 胡建华, 贺耀北. 基于里兹法的圆形地下连续墙受力分析[J]. 中国公路学报, 2017, 30(1): 48-55.
CUI Jian-feng, HU Jian-hua, HE Yao-bei. Force analysis of circular underground diaphragm wall based on Ritz method[J]. **China Journal of Highway and Transport**, 2017, 30(1): 48-55.

[16] 黄义, 何芳社. 弹性地基上的梁、板、壳[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
HUANG Yi, HE Fang-she. Beams, slabs, and shells on elastic foundations[M]. Beijing: Science Press, 2005.

[17] 汤任基. 计算弹性基础圆环的初参数法[J]. 兰州大学学报, 1961, 1(1): 25-42.
TANG Ren-ji. The initial parameter method for calculating elastic base rings[J]. **Journal of Lanzhou University**, 1961, 1(1): 25-42.